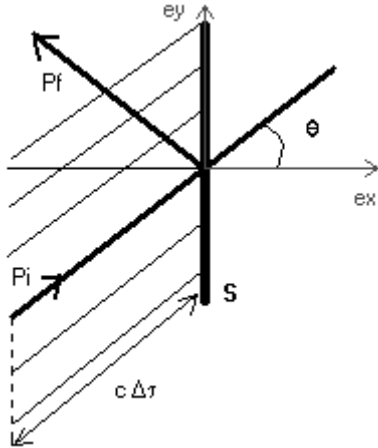


# Calcul de la force due à la pression solaire

Soit une voile de surface  $S$  de coefficient de réflexion  $R$ , frappée par des photons d'énergie  $h\nu$  de quantité de mouvement  $p = \frac{h\nu}{c}$  et de densité  $d$ .

$\theta$  l'angle entre la normale à la voile et les rayons.

## 1) Origine de la force



$$\vec{F} = -\frac{d\vec{p}}{dt}$$

Chaque photon qui frappe la voile lui fournit sa quantité de mouvement.

On a alors :

$$\vec{dp}_{t+\Delta\tau} = -\vec{F}.dt$$

D'où l'expression moyenne de la force :

$$\langle \vec{F} \rangle = \frac{1}{\Delta\tau} \int_t^{t+\Delta\tau} \vec{F}.dt$$

$$\langle \vec{F} \rangle = \frac{-1}{\Delta\tau} \int_t^{t+\Delta\tau} d\vec{p}$$

Calculons maintenant  $\Delta p$  :

$$-\Delta\vec{p} = \vec{p}_i - \vec{p}_f$$

$$-\Delta\vec{p} = (1+R)p \cos\theta \vec{e}_x + (1-R)p \sin\theta \vec{e}_y$$

$$-\Delta\vec{p} = p(\cos\theta \vec{e}_x + \sin\theta \vec{e}_y) - Rp(-\cos\theta \vec{e}_x + \sin\theta \vec{e}_y)$$

On pose alors

$$-\Delta\vec{p} = p.\vec{A}$$

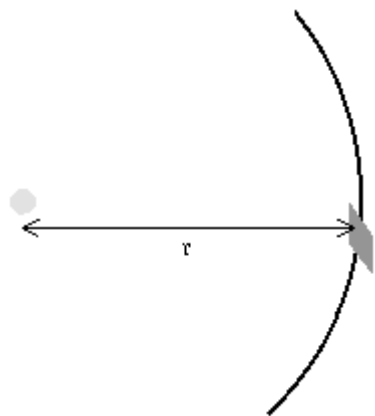
Comme on a  $c.\Delta t.\cos\theta$  photons qui frappent la voile en un temps  $\Delta t$ ,

$$\langle \vec{F} \rangle = p.c.d.S.\cos\theta \vec{A}$$

$$\langle \vec{F} \rangle = h\nu.d.S.\cos\theta \vec{A}$$

## 2) Puissance reçue par la voile

Soit  $P_s$  la puissance surfacique délivrée par le soleil,



$$P_s = \frac{P_{sol}}{4\pi r^2}$$

Mais aussi ,

$P_s = (\text{Nb de photons qui traversent une unité de surface par seconde}) \cdot \text{Energie d'un photon}$

$$= d.c.h.v$$

On a donc :

$$d.h.v = \frac{P_s}{c}$$

$$d.h.v = \frac{P_{sol}}{4\pi r^2 c}$$

Finalement,

$$\langle \vec{F} \rangle = \frac{P_{sol}}{4\pi r^2 c} \cdot S \cdot \cos \theta \vec{A}$$

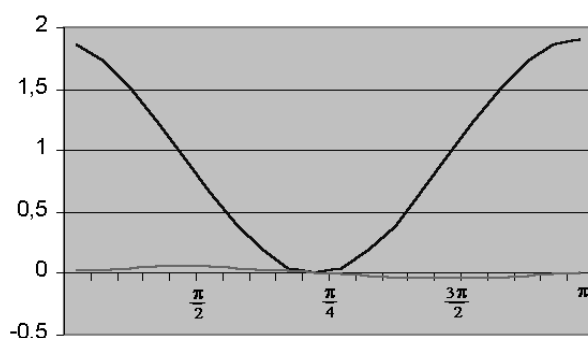
On peut donc donner l'expression de la force subie par la voile :

$$\langle \vec{F} \rangle = (1+R) \frac{P_{sol}}{4\pi r^2 c} S \cos^2 \theta \vec{e}_x + (1-R) \frac{P_{sol}}{4\pi r^2 c} S \cos \theta \sin \theta \vec{e}_y$$

Le calcul précédent tient sa simplicité dans l'approximation d'une ré émission du photon sous le même angle alors qu'elle est faite de façon isotrope ( en moyenne pondérée sous un même angle) .

## Approximation de la force

Afin de simplifier tous les autres calculs, notamment ceux des trajectoires, on veut obtenir une expression plus simple de la force due à la pression solaire. Voyons si l'on peut négliger l'une des composantes de la force.



- La force sur l'axe  $e_x$  , perpendiculaire à la voile.
- La force sur l'axe  $e_y$  , parallèle à la voile.

Graphique représentant les normes des deux composantes de la force F , à même distance pour un coefficient de réflexion R=0.9.

Numériquement on a  $F_x < 10.F_y$  pour

$$\theta \in \left[ 0.732, \frac{\pi}{2} \right]$$

Mais alors ,les forces sont faibles on peut donc encore négliger la composante sur  $e_y$ .

Dans toute la suite on ne considérera donc que la composante sur  $e_x$  ,on a donc :

$$\langle \vec{F} \rangle = (1 + R) \frac{P_{sol}}{4\pi r^2 c} S \cos^2 \theta \vec{e}_x$$

## Intensité de la Force de Pression

Prenons un voilier solaire d'une masse de  $m=200$  kg et d'une surface de  $S=6400$  m<sup>2</sup> ,que l'on place face au soleil ( $\cos\theta=1$ ) à une distance quelconque .Le vaisseau n'est soumis qu'à la force attractive du soleil G et la force de pression solaire F. Les deux forces étant proportionnelles à l'inverse du carré de la distance le rapport des deux est indépendant de la distance au soleil .

$$\frac{F}{G} = \frac{P_{sol} S}{4\pi c \cdot g M m}$$

Application numérique :

- $P_{sol} = 4,23 \cdot 10^{26}$  W
- $c = 3,10^8$  m/s
- $g = 6,67 \cdot 10^{-11}$  USI
- $M = 1,99 \cdot 10^{30}$  kg

$$\frac{F}{G} = 27,05 \cdot 10^{-3}$$

L'intensité de la force due à la pression solaire est donc très faible par rapport à l'attraction du soleil, c'est pourquoi elle a très peu été utilisée par les vaisseaux spatiaux. Néanmoins , le soleil fournit une force quasiment constante (à l'exception des cônes d'ombre) à ce vaisseau , c'est ce qui rend les voiliers solaires intéressants pour les vols interplanétaires.

Même si la force fournie est faible , l'accélération du voilier est continuellement entretenue ce qui permet d'atteindre des vitesses de l'ordre de 50 km/s ,des vitesses qui permettent de ramener la durée des vols interplanétaires à l'échelle humaine .

## Pression de radiation

### Démonstration électromagnétique

Les champs sont suivant z d'où, pour x=0 :

$$E_{i0}e^{i(w_i t - \bar{k}_i \cdot \bar{y})} + E_{r0}e^{i(w_r t - \bar{k}_r \cdot \bar{y})} = E_{t0}e^{i(w_t t - \bar{k}_t \cdot \bar{y})} \quad (1)$$

En particulier, en y=0, les fonctions harmoniques de pulsations différentes étant libres,

$$\boxed{w_i = w_r = w_t} \quad (1')$$

Les équations de propagation ( $\vec{E} = \vec{0}$ ) donnent :  $\frac{k_i^2 c^2}{n_1^2} = \frac{k_r^2 c^2}{n_1^2} = \frac{k_t^2 c^2}{n_2^2}$  (2)

D'où, immédiatement,  $k_i^2 = k_r^2$  (3)

$$n_2^2 k_i^2 = n_1^2 k_t^2 \quad (4)$$

Or dans le plan de réflexion,  $k^2 = k_x^2 + k_y^2$  pour les trois vecteurs d'ondes.

D'où :  $k_{t_x}^2 = \frac{n_2^2}{n_1^2} k_i^2 - k_{t_y}^2$  (4')

Avec (1), t=0, on a de même que pour (1') :  $k_{i_y} = k_{r_y} = k_{t_y}$  (5)

Donc  $k_{t_x}^2 = \frac{n_2^2}{n_1^2} k_i^2 - k_{i_y}^2$  c'est à dire :

$$\boxed{k_{t_x}^2 = \frac{n_2^2}{n_1^2} k_{i_x}^2 + \left( \frac{n_2^2}{n_1^2} - 1 \right) k_{i_y}^2} \quad (6')$$

$$\boxed{k_{t_y} = k_{i_y}} \quad (6'')$$

avec (3) :  $k_{i_x}^2 + k_{i_y}^2 = k_{r_x}^2 + k_{r_y}^2$

avec (5) on a alors  $k_{r_x}^2 = k_{i_x}^2$ , d'où :

$$\boxed{k_{r_x} = -k_{i_x}} \quad (7')$$

$$\boxed{k_{r_y} = k_{i_y}} \quad (7'')$$

en injectant les résultats dans (1), on a maintenant :  $E_{i0} + E_{r0} = E_{t0}$

de même, par continuité du champ magnétique :  $B_{i0} + B_{r0} = B_{t0}$ , en particulier

$B_{i0y} + B_{r0y} = B_{t0y}$  d'où  $k_{i_x} E_{i0} + k_{r_x} E_{r0} = k_{t_x} E_{t0}$

On a alors  $E_{r0} = \frac{k_{i_x} - k_{t_x}}{k_{i_x} + k_{t_x}} E_{i0}$  (8')

$$E_{t0} = \frac{2k_{i_x}}{k_{i_x} + k_{t_x}} E_{i0} \quad (8'')$$

Au voisinage du métal, on pose  $E = E_r + E_i = E_0 e^{i(wt - \bar{k} \cdot \bar{y})}$ .

On définit les angles de la réflexion par  $\cos \theta_i = \frac{k_{i_x}}{k_i}$  et  $\cos \theta_r = \frac{k_{r_x}}{k_r}$  (d'où la représentation graphique).

On définit le coefficient de réflexion par :  $R = \left| \frac{E_{r0}}{E_{i0}} \right|^2 = \left( \frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^2 + n_2^2} \right)^2$ ,  $(n_1, n_2) \in \mathbb{C}$  (9)

Dans le cas d'une onde où le champ électrique est dans le plan de la figure, on peut effectuer le même calcul. On arrive alors aux expressions :

$$E_{r0} = \frac{n_1^2 k_{ix} - n_2^2 k_{ix}}{n_1^2 k_{ix} + n_2^2 k_{ix}} E_{i0}$$

$$E_{t0} = \frac{2 n_1 n_2 k_{ix}}{n_1^2 k_{ix} + n_2^2 k_{ix}} E_{i0}$$

### Indices de réfraction Complexe

On définit les indices de réfraction par  $n = \frac{c}{v}$ , où  $c$  est la vitesse de propagation dans le milieu.

Dans le cas d'un métal, l'onde  $\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{e}_x$ , par exemple, répond à un effet de peau. En posant :

$$n = n_R - i n_I, \quad \frac{\omega n_I}{c} = \frac{1}{\delta} \text{ et } k' = \frac{\omega n_R}{c} \text{ comme on a par définition } k = \frac{\omega n}{c} \text{ on vérifie bien :}$$

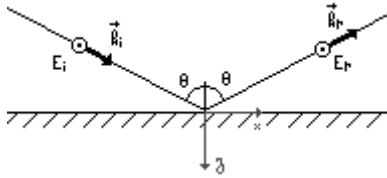
$$\vec{E} = E_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{i(\omega t - k'x)} \vec{e}_x$$

### Application à la réflexion métallique

L'indice de réfraction des métaux à une partie imaginaire importante pour certain  $\lambda$ . Si on calcul le coefficient de réflexion pour un milieu d'indice imaginaire pure, on a alors une réflexion totale. Ceci explique les propriétés réfléchissantes des métaux.

(D'après le cours de Feynman, *Electromagnétisme*)

## Pression électrostatique



L'onde incidente est de la forme

$$\begin{cases} \vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - xk \sin \theta - zk \cos \theta) \vec{u}_y \\ \vec{B}_i = \frac{E_0}{c} (-\cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_z) \cos(\omega t - xk \sin \theta - zk \cos \theta) \end{cases}$$

Et pour l'onde réfléchie, on a

$$\begin{cases} \vec{E}_r = E_0 \cos(\omega t - xk \sin \theta + zk \cos \theta) \vec{u}_y \\ \vec{B}_r = -\frac{E_0}{c} (\cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_z) \cos(\omega t - xk \sin \theta + zk \cos \theta) \end{cases}$$

On en déduit l'onde résultante par superposition  $\vec{B}$  :

$$\begin{cases} -\frac{2E_0}{c} \cos \theta \cos(zk \cos \theta) \cos(\omega t - xk \sin \theta) \\ 0 \\ \frac{2E_0}{c} \sin \theta \sin(zk \cos \theta) \sin(\omega t - xk \sin \theta) \end{cases}$$

et  $\vec{E} = 2E_0 \sin(zk \cos \theta) \sin(\omega t - xk \sin \theta) \vec{u}_y$

Les formules de passages nous donnent alors :

$$\sigma = 0 \quad \text{et} \quad \vec{j}_s = 2E_0 c \epsilon_0 \cos \theta \cos(zk \cos \theta) \cos(\omega t - xk \sin \theta) \vec{u}_y$$

Comme  $d\vec{F} = \frac{1}{2} [\sigma \vec{E}(0) + \vec{j}_s \wedge \vec{B}(0)] d\vec{S}$

On a donc en moyennant :  $p = \epsilon_0 E_0 \cos^2 \theta$

On veut se ramener à la même expression que celle calculée avec le modèle corpusculaire. Pour cela, on définit :

$$P_{sol} = \iint \langle \vec{R} \rangle d\vec{S}$$

En prenant comme surface une sphère de rayon r, on a :

$$\begin{aligned} P_{sol} &= R \cdot 4\pi r^2 \\ &= \frac{\epsilon_0 E_0 c}{2} 4\pi r^2 \end{aligned} \quad \text{comme } R = \langle \epsilon_0 E^2(t) \rangle = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2}$$

d'où  $\epsilon_0 E_0^2 = 2 \frac{P_{sol}}{4\pi r^2 c}$

Finalement, on a

$$p = 2 \frac{P_{sol}}{4\pi r^2 c} \cos^2 \theta$$