Simulation

1) Pression

L'expression de la pression de radiation est $p = \frac{E}{c}$

Avec $E = éclairement\ du\ soleil\ au\ niveau\ de\ la\ Terre = 1{,}4\ kW.m^{-2}$

et $c = 3{,}00 * 10^8 m.s^{-1}$

On trouve $p = 4{,}6 * 10^{-6}\ Pascal$

On suppose le soleil à l'infini donc les rayons sont tous parallèles entre eux.

La pression sur la voile est $p' = 2p$ car on suppose que la voile renvoie parfaitement les rayons.

La force subie est donc $F = p'.S$ avec $S = surface\ de\ la\ voile\ en\ mètre$

Si on néglige toutes les autres forces, au maximum on a donc $ma_m = 2pS$ avec le principe fondamental de la dynamique. C'est-à-dire $a_m = \frac{2pS}{m}$

On veut $a_m = \frac{1}{1000} g = 9.8 * 10^{-3}\ m.s^{-2}$

Pour avoir cela on peut par exemple prendre $S \sim 2{,}13\ km^2$ et $m = 2000\ kg$

2) Paramétrage

On utilise les coordonnées polaires (r, θ). On pose $\vec{u}_r$ vecteur radial et $\vec{u}_\theta$ vecteur tangentiel.

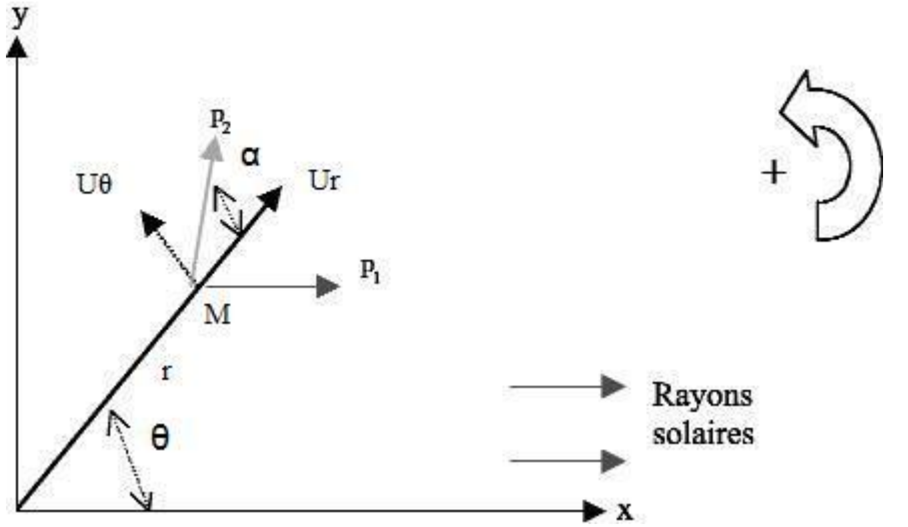
On considère le mouvement plan dans celui de l'écliptique (plan de la trajectoire annuelle du soleil vu de la Terre).

On a donc $\begin{cases} \overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r \\ \vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta \\ \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta \end{cases}$

On considère le référentiel géocentrique comme galiléen.

Avec la RFD on a

$$m\vec{a} = \vec{F} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \text{projection sur } \vec{u}_r : m(\ddot{r} - r\dot{\theta}) = F_{radial} \\ projection\ sur\ \vec{u}_\theta : m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = F_{tangentiel} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta} = \frac{F_{radial}}{m} \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = \frac{F_{tangentiel}}{m} \end{cases}$$



On pose $u = \dfrac{dr}{dt} =$ vitesse radiale et $s = r\dfrac{d\theta}{dt} =$ vitesse tangentielle

On a donc $\ddot{r} = \frac{du}{dt}$ et $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \frac{F_{radial}}{m} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{du}{dt} = F_{radial} + r\dot{\theta}^2$ et $r\dot{\theta}^2 = \frac{s^2}{r}$

Donc $\frac{du}{dt} = \frac{s^2}{r} + \frac{F_{radial}}{m}$ et $\frac{ds}{dt} = \dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$

On a $2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = \frac{F_{tangenciel}}{m} \quad \Leftrightarrow \quad \dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = \frac{F_{tangentiel}}{m} - \dot{r}\dot{\theta} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{ds}{dt} = \frac{F_{tangentiel}}{m} - \dot{r}\dot{\theta}$

On a aussi $\dot{r}\dot{\theta} = \frac{u.s}{r}$

Finalement $\boxed{\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \dfrac{s^2}{r} + \dfrac{F_{radial}}{m} \\ \dfrac{ds}{dt} = \dfrac{F_{tangentiel}}{m} - \dfrac{u.s}{r} \end{cases}}$

3)Forces

Bilan des forces :

- Force de gravitation $\vec{F} = -\frac{mMG}{r^2}\vec{u}_r$
- $\vec{p}_1$ la force relative aux rayons incidents. On a $\vec{p}_1 = p_1.\vec{\imath}$
  Avec $\vec{\imath}$ vecteur directeur de Ox, donc $\vec{\imath} = \cos(\theta)\,\vec{u}_r - sin(\theta)\vec{u}_\theta$
- $\vec{p}_2$ la force relative aux rayons réfléchis
  On note α l'angle entre $\vec{u}_r$ et $\vec{p}_2$, on a donc $\vec{p}_2 = p_2.(\cos(\alpha)\,\vec{u}_r + \sin(\alpha)\,\vec{u}_\theta)$

On introduit une fonction H qui représente la présence de lumière ou non en fonction de la position de la voile solaire.

On a en projetant $\begin{cases} F_{radial} = -\frac{mMG}{r^2} + H(p_1\cos(\theta) + p_2\cos(\alpha)) \\ F_{tangentiel} = H(-p_1\sin(\theta) + p_2\sin(\alpha)) \end{cases}$

La voile est supposé parfaite donc elle réagit comme un miroir, c'est-à-dire $p_1 = p_2 = p.S$

On a donc $\begin{cases} F_{radial} = -\frac{mMG}{r^2} + HpS(\cos(\theta) + \cos(\alpha)) \\ F_{tangentiel} = HpS(-\sin(\theta) + \sin(\alpha)) \end{cases}$

Finalement

$$\boxed{\begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{s^2}{r} - \frac{MG}{r^2} + \frac{HpS}{m}(\cos(\theta) + \cos(\alpha)) = \frac{s^2}{r} - \frac{MG}{r^2} + \frac{a_m}{2}H(\cos(\theta) + \cos(\alpha)) \\ \frac{ds}{dt} = -\frac{u.s}{r} + HpS(sin(\alpha) - \sin(\theta)) = -\frac{u.s}{r} + \frac{a_m}{2}H(\sin(\alpha) - \sin(\theta)) \end{cases}}$$

4) La fonction H

Le vaisseau est dans l'ombre de la Terre si $d < R_T$ c'est-à-dire $|\theta| < \theta_{lim}$

On a $\sin(\theta) = \frac{d}{r}$ donc $\sin(\theta_{lim}) = \frac{R_T}{r} \quad \Leftrightarrow \quad \theta_{lim} = \arcsin(\frac{R_T}{r})$

Si le voilier est dans l'ombre de la Terre on a H=0, sinon H=1

5) Energie et manœuvre optimale

L'énergie mécanique du voilier dans le champ de gravitation terrestre s'écrit $E_M = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$

Les forces de pression ne travaillent pas ici.

On pose $h = 2.\frac{E_M}{m} = 2.\left(\frac{1}{2}v^2 - \frac{GM}{r}\right) = v^2 - \frac{2GM}{r}$

Et $v^2 = u^2 + s^2$ donc $h = u^2 + s^2 - \frac{2GM}{r}$

On calcule $\frac{dh}{dt} = 2.\frac{du}{dt}.u + 2.\frac{ds}{dt}.s + \frac{2GM}{r^2}.\frac{dr}{dt}$ et $\begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{s^2}{r} - \frac{GM}{r^2} + \frac{a_m}{2}H(\cos(\theta) + \cos(\alpha)) \\ \frac{ds}{dt} = -\frac{u.s}{r} + \frac{a_m}{2}H(\sin(\alpha) - \sin(\theta)) \end{cases}$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{2s^2u}{r} - \frac{2GMu}{r} + ua_mH(\cos(\alpha) + \cos(\theta)) - \frac{2us^2}{r} + sa_mH(sin(\alpha) - \sin(\theta)) + \frac{2GMu}{r^2}$$

C'est-à-dire $\frac{dh}{dt} = a_mH\big(u(\cos(\theta) + \cos(\alpha)) + s(\sin(\alpha) - \sin(\theta))\big)$

On veut que $\frac{dh}{dt}$ soit maximal à chaque instant selon α

$$\frac{\partial h}{\partial \alpha} = a_mH(-u.sin(\alpha) + s.\cos(\alpha)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -u.\sin(\alpha) + s.\cos(\alpha) = 0$$

On a $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$ et $\sin^2(\alpha) = s^2\cos^2(\frac{\alpha}{u^2})$

C'est-à-dire $\cos^2(\alpha) = \frac{1}{1+\frac{s^2}{u^2}} = \frac{u^2}{u^2+s^2}$ donc $\boxed{\cos(\alpha) = \frac{u}{\sqrt{u^2+s^2}}}$

Et $\sin^2(\alpha) = 1 - \cos^2(\alpha) = \frac{s^2}{u^2+s^2}$ donc $\boxed{\sin(\alpha) = \frac{s}{\sqrt{u^2+s^2}}}$

Ce sont les deux conditions sur α pour que la poussée soit maximal.

6) Algorithme de résolution

On utilise la méthode d'Euler, donc une approche pas à pas. Pour cela il faut passer par un logiciel de calcul formel comme maple.